



## Robust H-Infinity Control with Input Signal Saturation Applied to a Ball on Plate System

---

Eduardo Guimarães Pedrosa, Vitoriano Medeiros Casas,  
João Aristeu Seixas Cardoso, Luiz Antonio Sobrinho de Souza,  
Luiz Alberto Queiroz Cordovil Júnior and Rodrigo Farias Araújo

EasyChair preprints are intended for rapid dissemination of research results and are integrated with the rest of EasyChair.

October 6, 2024

# Controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ com saturação do sinal de controle aplicado a um sistema *Ball on Plate*

Eduardo G. Pedrosa\* Vitoriano M. Casas\* João A. S. Cardoso\*  
Luiz A. S. Souza\* Luiz A. Q. Cordovil Júnior\*\*  
Rodrigo F. Araújo\*\*,\*

\* Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Amazonas, Manaus, AM, Brasil (e-mails: eduardo.filho@ufam.edu.br, vitoriano.casas@ufam.edu.br, joao-aristeu.cardoso@ufam.edu.br, luiz.sobrinho@ufam.edu.br).

\*\* Departamento de Engenharia de Controle e Automação, Universidade do Estado do Amazonas, Manaus, AM, Brasil (e-mail: luiz.cordovil05@gmail.com, rfaraujo@uea.edu.br)

---

**Abstract:** This paper presents an application of robust control in a Ball on Plate System, whose purpose is to equilibrate a sphere in a inclinable surface. To achieve it, the controller minimizes the  $\mathcal{H}_\infty$  norm while also guaranteeing stability under control input saturation. The approach used consists of utilizing LMIs for the controller synthesis, by the Bounded-Real Lemma with a stability condition for input saturation. A Kalman filter is used to estimate the non-mensurable state of the system and filter the output in order to reduce the measurement noise from the sensor. The controller and filter are applied to a real plant utilizing an ESP32 microcontroller. For the construction of the plant, a resistive touchscreen is used in order to measure position and two servomotors are used to incline the plane in two directions. The results presented show the efficiency of robust controllers in stabilizing real plants even under disturbances and the filter's capacity of improving the output measure while also estimating non-measurable states.

**Resumo:** Este artigo apresenta uma aplicação de controle robusto em um sistema *Ball on Plate*, cujo propósito consiste em equilibrar uma esfera em um plano inclinável. Para isso, o controlador busca minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  e garantir a estabilidade na presença de saturação no sinal de controle. A abordagem utilizada consiste na utilização de LMIs para a síntese do controlador, combinando o *Bounded-Real Lemma* com uma condição para estabilidade na presença de saturação da entrada. O filtro de Kalman é utilizado para estimar o estado não mensurável do sistema e filtrar a saída de forma a reduzir o ruído de medição proveniente do sensor. O controlador e o filtro são implementados em uma planta real utilizando um microcontrolador ESP32. Para a construção do sistema foi utilizada uma tela de toque resistiva, a fim de medir a posição da esfera no plano, e dois servomotores responsáveis por inclinar o plano nas duas direções. Os resultados apresentados ilustram a eficiência de controladores robustos em estabilizar plantas reais mesmo na presença de distúrbios e a capacidade do filtro de melhorar a qualidade de medição além de estimar estados não mensuráveis.

*Keywords:* Robust Control; Kalman Filter; Input Saturation.

*Palavras-chaves:* Controle Robusto; Filtro de Kalman; Saturação na Entrada.

---

## 1. INTRODUÇÃO

Em sistemas de controle, o principal objetivo é a garantia de estabilidade. Tal garantia por vezes existe apenas ao se simplificar o modelo ou assumir certas propriedades da planta que não necessariamente refletem o sistema real. As técnicas de controle clássicas, baseadas nos critérios de estabilidade apresentados por Hurwitz (1895), normalmente não consideram problemas como ruídos de medição, distúrbios e limite de saturação para o sinal de entrada. Técnicas mais avançadas de controle com garantia de boa rejeição a distúrbios, a chamada *teoria de controle robusto*, ganharam mais destaque ao longo do século XX devido aos novos desafios em estabilizar sistemas complexos onde a

planta de controle precisava ser resistente a diversos tipos de ambiente.

Além disso, o uso de filtros para reduzir ruídos de medição é um aspecto fundamental de implementação de controladores em plantas reais, visto que em diversos ambientes o ruído não pode ser removido. As técnicas inicialmente desenvolvidas por Kalman (1960) permitem a construção de filtros que para sistemas lineares possuem estimação ótima dos estados. Outro ponto que não é normalmente abordado durante a garantia de estabilidade é a saturação do sinal de entrada, visto que sistemas reais possuem sinais limitados para seus atuadores, como motores e válvulas. Os critérios de estabilidade desenvolvidos em (Tarbouriech et al., 2011) permitem a síntese de controladores com

garantia de estabilidade na presença de saturação. Por fim, uma poderosa ferramenta matemática que permite formular os problemas para síntese de controladores são as chamadas desigualdades matriciais lineares, ou LMIs (*Linear Matrix Inequalities*), que interpretam o problema de síntese como uma otimização convexa (Boyd et al., 1995).

À luz de tais problemáticas e ferramentas, este artigo tem como objetivo uma aplicação de controle robusto em um sistema dinâmico *Ball on Plate*, que consiste de uma superfície plana capaz de ser inclinada, onde sobre ela se encontra uma esfera. O objetivo do sistema é equilibrar a esfera na origem do sistema de coordenadas. Para captar as informações de posição da esfera e atuar no controle de inclinação, serão utilizados servomotores como atuadores do sistema e para medição da posição uma tela de toque resistiva. O controlador utilizado busca minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema ao mesmo tempo que garante estabilidade na presença de saturação do sinal de controle. Mais adiante o problema será formulado por meio de um problema de otimização convexa. Além disso, o filtro de Kalman é utilizado para estimar o estado não mensurável e melhorar a leitura da saída.

**Notação.** Uma variável temporal escalar ou vetorial  $x$ , ou matricial  $M$ , é representada em tempo discreto pela notação  $x_k$  e  $M_k$ . Uma matriz simétrica é dita ser definida positiva (negativa) se todos os seus autovalores forem maiores (menores) do que zero, representada por  $M > 0$  ( $M < 0$ ). Para matrizes em que pelo menos um dos autovalores é igual a zero, a matriz é dita ser semi-definida positiva (negativa), representado como  $M \geq 0$  ( $M \leq 0$ ). O símbolo  $*$  é utilizado para indicar o elemento simétrico em uma matriz.

## 2. CONCEITOS PRELIMINARES

### 2.1 Sistema *Ball on Plate*

O sistema *ball on plate*, ilustrado na Figura 1, é uma planta prática bastante utilizada na aplicação de técnicas de controle, por ser um sistema com modelo matemático bem conhecido e devido a sua facilidade de construção (Nokhbeh e Khashabi, 2011). Para simplificação, a modelagem matemática assume as seguintes condições:

- A esfera não desliza sobre a superfície;
- A esfera é completamente simétrica e homogênea;
- Todas as fricções são negligenciadas;
- A esfera está sempre em contato com a superfície.

O modelo do sistema, determinado a partir da equação de Euler-Lagrange, possui 4 graus de liberdade: 2 para o movimento da esfera e 2 para a inclinação da superfície. A coordenada generalizada do sistema é  $x$  e  $y$  para a posição da esfera e  $\alpha$  e  $\beta$  para as inclinações da superfície nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, e a origem das coordenadas da esfera é no centro da superfície.

Considerando servomotores atuando sobre os ângulos de inclinação e desconsiderando forças dissipativas devido ao atrito do movimento da esfera na superfície (da Silveira Castro et al., 2013), o modelo dinâmico linearizado, em torno dos ângulos nulos, para o sistema é dado pelas equações a seguir:

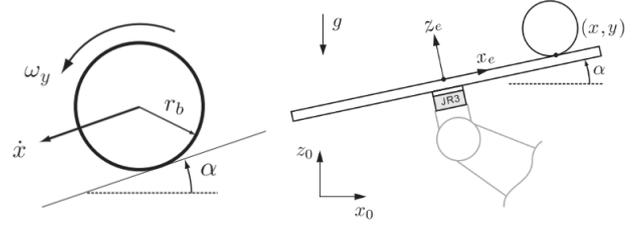


Figura 1. Sistema *Ball on Plate*. Adaptado de Nokhbeh e Khashabi (2011).

$$\begin{aligned} \frac{7}{5} \ddot{x} + g\alpha + \frac{1}{m_b} f_c \dot{x} &= 0 \\ \frac{7}{5} \ddot{y} + g\beta + \frac{1}{m_b} f_c \dot{y} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

em que  $f_c$  é o coeficiente de atrito.

### 2.2 Sistema SISO com saturação no sinal de controle

Considere um sistema SISO de tempo discreto sujeito à saturação na entrada de controle:

$$x_{k+1} = Ax_k + B \text{sat}(u_k) \quad (2)$$

em que  $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $u_k \in \mathbb{R}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ , com função de saturação definida como

$$\text{sat}(u_k) := \text{sign}(u_k) \times \min\{|u_k|, u_0\},$$

sendo  $u_0$  o máximo valor absoluto que o sinal de controle pode assumir.

Define-se uma função zona-morta como:

$$\phi(u_k) = u_k - \text{sat}(u_k) \quad (3)$$

tal que a desigualdade a seguir seja satisfeita para alguma matriz  $G \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  e  $T \in \mathbb{R}$ ,

$$2\phi(u_k)^T T (\phi(u_k) - Gx_k) \leq 0 \quad (4)$$

Considerando um lei de controle por realimentação de estados

$$u_k = Kx_k \quad (5)$$

a seguinte região para o sinal de controle pode ser definida

$$D_u = \{x_k : |K - G|x_k| \leq u_0\}. \quad (6)$$

e substituindo (3) em (2) o sistema em malha fechada é dado por

$$x_{k+1} = (A + BK)x_k - B\phi(Kx_k). \quad (7)$$

Utilizando uma função candidata de Lyapunov quadrática  $V(x) = x^T Px > 0$  no Lema a seguir, é possível obter condições suficientes para a estabilização de (7).

**Lema 1.** (Tarbouriech et al. (2011)). Considerando a função candidata de Lyapunov quadrática, para o sistema (7), a estabilidade do ponto de equilíbrio é garantida dado que as seguintes LMIs sejam factíveis

$$\begin{bmatrix} -W & -Z^T & W(A+BK)^T \\ -Z & -2S & SB^T \\ (A+BK)W & BS & -W \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} W & WK^T - Z^T \\ KW - Z & u_0^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (9)$$

em que  $W = W^T = P^{-1} > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $S > 0 \in \mathbb{R}$  e  $Z \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ .

### 2.3 Filtro de Kalman

O filtro introduzido por Kalman (1960) é uma poderosa ferramenta na implementação de sistemas de controle. Através dele é possível estimar estados não mensuráveis do sistema assim como melhorar a confiança estatística da medição. Para isso o filtro reduz a matriz de covariância dos estados por meio das etapas de predição ( $-$ ) e assimilação ( $+$ ) (Aguirre, 2014). As equações do filtro são dadas a seguir:

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1}^- = A\hat{x}_k^+ + Bu_k \\ P_{k+1}^- = A P_k^+ A^\top + \Upsilon_k Q \Upsilon_k^\top \\ K_{k+1} = P_{k+1}^- C^\top [C P_{k+1}^- C^\top + R]^{-1} \\ \hat{x}_{k+1}^+ = \hat{x}_{k+1}^- + K_{k+1} [y_{k+1} - C\hat{x}_{k+1}^-] \\ P_{k+1}^+ = P_{k+1}^- - K_{k+1} C P_{k+1}^- \end{cases} \quad (10)$$

em que as duas primeiras equações compõem a etapa de predição ou propagação e as duas últimas compõem a etapa de assimilação.  $\Upsilon_k$  é a matriz que pondera a influência do ruído no sistema. O valor  $K$  é chamado de *ganho de Kalman*, que é calculado de forma a ponderar a medição e a predição de forma que a covariância seja minimizada após a assimilação. Esse conjunto de equações, por estar no tempo discreto, é diretamente implementável em sistemas digitais como microcontroladores. As matrizes  $Q$  e  $R$  são matrizes diagonais de ponderação para o filtro, onde cada elemento diagonal de  $Q$  é o fator de ponderação do estado estimado e cada elemento diagonal de  $R$  é o fator de ponderação da saída real.

### 2.4 Caracterização da norma $\mathcal{H}_\infty$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  de um sistema dinâmico é a norma do espaço vetorial das funções complexas próprias e analíticas no semiplano direito e pode ser entendida como a máxima amplificação que um sinal de entrada causa no sinal de saída (Zhou e Doyle, 1998). Uma outra interpretação da norma é de que ela indica que o sistema possui energia finita, de tal forma que dada uma entrada limitada, sua saída também será limitada. Ao se projetar controladores com foco em minimizar tal norma, é possível reduzir a influência de distúrbios externos no sistema, visto que sua amplificação será reduzida pelo controlador.

Para isso, utiliza-se a seguinte formulação para caracterizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  baseado no fato de o sistema possuir energia finita. Ela é descrita em (Aguirre et al., 2007) como  $\|z\|_2^2 \leq \gamma^2 \|w\|_2^2$ . Tal relação permite formular a condição:

$$z^T z - \gamma^2 w^T w < 0 \quad (11)$$

em que  $\|\mathcal{H}\|_\infty \leq \gamma$  é um limitante superior para a norma.

## 3. CONSTRUÇÃO DA PLANTA *BALL ON PLATE*

### 3.1 Estrutura mecânica

O sistema projetado é baseado nos modelos encontrados em (da Silveira Castro et al., 2013), (Sumega et al., 2018) e (Nguyen et al., 2012). Desta forma, os dois atuadores são posicionados de maneira perpendicular de forma a desacoplar os eixos do sistema e permitir o projeto de

controladores independentes para os dois eixos modelados de acordo com (1).

A planta foi construída utilizando manufatura aditiva através de impressão 3D. As peças da base são feitas com plástico ABS para maior resistência estrutural e as peças de encaixe da tela de toque são feitas com plástico PLA para reduzir o peso. O sistema físico é exibido na Figura 2.



Figura 2. Protótipo montado.

### 3.2 Sensor, atuador e microcontrolador

A posição da esfera é medida através de uma tela de toque resistiva devido ao seu baixo custo e boa precisão. A tela funciona como 2 divisores de tensão perpendiculares entre si que são ativados através do correto chaveamento dos quatro terminais da tela, sendo o quinto terminal o pino de saída da tensão analógica causada pela pressão da esfera na tela. A tela escolhida, possui 15", resolução de  $1024 \times 768$  pixels, com proporção 4:3 e área do *display* de  $32,4\text{cm} \times 22,8\text{cm}$ . Devido ao chaveamento necessário para a leitura das duas coordenadas, a taxa de amostragem deve ser escolhida cuidadosamente para evitar que o transiente de tensão de uma leitura induza ruído de medição na leitura da próxima coordenada.

É utilizado como atuador o servomotor *TowerPro 996R*, por seu baixo custo comparado a outros servomotores disponíveis comercialmente e por já possuir controle em malha fechada para a posição angular. Esse servomotor toma como entrada pulsos de PWM de forma a controlar o ângulo do seu eixo. Seu eixo gira em uma angulação de  $0^\circ$  até  $180^\circ$ . Por possuir uma malha interna para o controle de posição que garante que o ângulo de referência seja alcançado sem sobressinal, considera-se que a sua dinâmica é muito mais rápida que a dinâmica da planta. Além disso, o microcontrolador utilizado é um ESP32, que possui conversor analógico-digital de 12 bits e pinos capazes de produzir modulação por largura de pulso (PWM).

## 4. SÍNTESE DO CONTROLADOR

### 4.1 Modelo do sistema

Como o atuador está em contato com a plataforma por meio de dois elos, ao invés da origem como em (Nokhbeh e Khashabi, 2011), é utilizada a relação

$$\alpha|\beta = \frac{d}{L}\theta_{\alpha|\beta},$$

em que  $d$  é a largura do primeiro elo e  $L$  a distância da origem do sistema até o ponto de contato da junta de ligação. Considerando que os dois eixos são simétricos e possuem os mesmos parâmetros  $d$  e  $L$ , a partir daqui considera-se que os dois sistemas são representados pelo mesmo modelo, válido para os dois eixos. Logo, o sinal de entrada do sistema descrito por (1) é

$$\theta = \frac{L}{d}\alpha = \frac{L}{d}\beta,$$

Para o protótipo construído os parâmetros  $d$  e  $L$  dos dois eixos são  $d = 0,046$  m e  $L = 0,104$  m. A esfera possui massa  $m_b = 0,11$  kg e raio  $r_b = 0,015$  m. O coeficiente de atrito  $f_c$  é estimado como  $0,02$  Ns/m. Após a definição do modelo no tempo contínuo, é feita a discretização de (1), considerando o período de amostragem de  $T_s = 35$ ms, determinado experimentalmente de forma que o ruído induzido pelo chaveamento não afete significativamente o sistema. O sistema no espaço de estados discreto, utilizando os valores dos parâmetros, é definido como

$$\begin{cases} x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0,035 \\ 0 & -0,13 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} -0,002 \\ -0,11 \end{bmatrix} u_k \\ y_k = [1 \ 0] x_k \end{cases} \quad (12)$$

em que  $x_{(1)k}$  é o estado de posição,  $x_{(2)k}$  é o estado da velocidade e a saída  $y_k$  também é a posição da esfera.

#### 4.2 Escolha das matrizes do filtro de Kalman

O filtro de Kalman (10), é diretamente implementado com as matrizes  $Q$  e  $R$  determinadas experimentalmente como

$$Q = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R = 150$$

fazendo-se com que o filtro dê mais peso para a estimativa de posição do que a posição lida pelo sensor.

#### 4.3 Síntese do controlador

Considere o sistema discreto SISO (2) com distúrbio de energia finita, satisfazendo (11),

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + B\text{sat}(u_k) + B_w w_k \\ z_k = C_z x_k + D_{zu} u_k + D_{zw} w_k \\ y_k = I x_k \end{cases} \quad (13)$$

em que  $y_k \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $z_k \in \mathbb{R}^{n_z \times 1}$ ,  $C \in \mathbb{R}$ ,  $D \in \mathbb{R}^n$ ,  $B_w \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $D_{zu} \in \mathbb{R}$  e  $D_{zw} \in \mathbb{R}$ . O único ponto de equilíbrio de (13) é a origem. Deseja-se projetar uma lei de controle por realimentação de estados (5) de forma que a origem do sistema seja estável. O Teorema 2 estabelece condições suficientes para o projeto de controladores, onde uma função quadrática de Lyapunov é considerada.

**Teorema 2.** Dada um limitante do sinal de controle  $u_0$ . O sistema (13) é estabilizado em torno do ponto de equilíbrio (origem) pela lei de controle (5), sendo  $\gamma$  um limitante superior para a norma  $\mathcal{H}_\infty$ , se existirem a matriz simétrica  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H \in \mathbb{R}$ , e quaisquer matrizes  $Z \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  e  $V \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ , tal que as LMIs abaixo sejam satisfeitas.

$$\begin{bmatrix} -Y & * & * & * & * \\ AY + BZ & -Y & * & * & * \\ V & -HB^\top & -2H & * & * \\ C_z Y + D_{zu} Z & 0 & -D_{zu} H & -I & * \\ 0 & B_w^\top & 0 & D_{zw}^\top & -\rho I \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} Y & (Z - V)^\top \\ (Z - V) & u_0^2 \end{bmatrix} > 0 \quad (15)$$

A matriz de Lyapunov pode ser recuperada por  $P = Y^{-1}$ , os ganhos de realimentação por  $K = ZY^{-1}$  e o limitante superior da norma  $\mathcal{H}_\infty$  por  $\gamma = \sqrt{\rho}$ .

**Prova.** Inserindo (3) em (13) chega-se ao seguinte sistema em malha fechada

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_f x_k - B\phi_k + B_w w_k \\ z_k = C_f x_k - D_{zu}\phi_k + D_{zw} w_k \end{cases} \quad (16)$$

em que  $A_f = A + BK$ ,  $C_f = C + D_{zu}K$ , e impondo as restrições (11) e (4) ao sistema, junto à condição de Lyapunov  $\Delta V < 0$ , a seguinte condição de estabilidade assintótica é considerada:

$$\Delta V + z_k^\top z_k - \gamma^2 w_k^\top w_k - 2\phi_k^\top T(\phi - Gx_k) < 0 \quad (17)$$

em que  $\Delta V = V(x_{k+1}) - V(x_k)$ . Expandindo todos os termos e reagrupando-os na forma matricial é possível chegar à desigualdade (18), exibida na página seguinte para espaço adequado.

Tomando os termos entre parênteses de (18) e reescrevendo-os pelo complemento de Schur, é possível chegar à desigualdade (19), também exibida na página seguinte, em que a primeira submatriz pode ser reescrita novamente pelo complemento de Schur, de forma que (19) é reescrita como (20), trocando as linhas e colunas para se obter uma forma simétrica.

$$\begin{bmatrix} -P & * & * & * & * \\ PA_f & -P & * & * & * \\ TG & -B^\top P & -2T & * & * \\ C_f & 0 & -D_{zu} & -I & * \\ 0 & B_w^\top P & 0 & D_{zw}^\top & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (20)$$

Fazendo-se uma transformação de similaridade com  $\text{diag}(P^{-1}, P^{-1}, T^{-1}, I, I)$

e expandindo  $A_f = A + BK$  e  $C_f = C_z + D_{zu}K$  obtém-se a seguinte equação

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & * & * & * & * \\ (A + BK)P^{-1} & -P^{-1} & * & * & * \\ GP^{-1} & -T^{-1}B^\top & -2T^{-1} & * & * \\ (C_z + D_{zu}K)P^{-1} & 0 & -D_{zu}T^{-1} & -I & * \\ 0 & B_w^\top & 0 & D_{zw}^\top & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

que por meio de variáveis linearizantes  $P^{-1} = Y$ ,  $T^{-1} = H$ ,  $KP^{-1} = Z$ ,  $GP^{-1} = V$  e  $\gamma^2 = \rho$ , é reformulada como a desigualdade matricial linear (22).

$$\begin{bmatrix} -Y & * & * & * & * \\ AY + BZ & -Y & * & * & * \\ V & -HB^\top & -2H & * & * \\ C_z Y + D_{zu} Z & 0 & -D_{zu} H & -I & * \\ 0 & B_w^\top & 0 & D_{zw}^\top & -\rho I \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

Para a restrição de estabilidade sob saturação (9), é utilizada a Equação (6). Tomando o módulo da desigualdade:

$$\frac{1}{u_0^2} x^\top (K - G)^\top (K - G) x \leq 1 \quad (23)$$

que pode ser subtraído da forma quadrática de Lyapunov, de forma que a restrição de estabilidade seja mais conservadora, mas que continue sendo positiva, gerando

$$\begin{bmatrix} x^\top \\ w^\top \\ \phi^\top \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} A_f^\top P A_f - P & * & * \\ B_w^\top P A_f & -\gamma^2 I + B_w^\top P B_w & * \\ -B^\top P A_f + T G & -B^\top P B_w & -2T + B^\top P B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_f^\top \\ D_{zw}^\top \\ -D_{zu}^\top \end{bmatrix} [C_f \ D_{zw} - D_{zu}] \right) \begin{bmatrix} x \\ w \\ \phi \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} A_f^\top P A_f - P & * & * & * \\ B_w^\top P A_f & \gamma^2 I + B_w^\top P B_w & * & * \\ -B^\top P A_f + T G & -B^\top P B_w & -2T + B^\top P B & * \\ C_f & D_{zw} & -D_{zu} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

$$x^\top P x - \frac{1}{u_0^2} x^\top (K - G)^\top (K - G) x > 0 \quad (24)$$

e pelo complemento de Schur

$$\begin{bmatrix} P & (K - G)^\top \\ (K - G) & u_0^2 \end{bmatrix} > 0 \quad (25)$$

em que realizando uma transformação de similaridade com  $\text{diag}(P^{-1}, I)$  e reescrevendo os termos com as mesmas variáveis linearizantes  $P^{-1} = Y$ ,  $K P^{-1} = Z$  e  $G P^{-1} = V$  obtém-se

$$\begin{bmatrix} Y & (Z - V)^\top \\ (Z - V) & u_0^2 \end{bmatrix} > 0 \quad (26)$$

que atende ao critério (9). A matriz  $P$  pode ser recuperada através de  $P = Y^{-1}$ , os ganhos de realimentação por  $K = Z Y^{-1}$  e o limitante superior da norma  $\mathcal{H}_\infty$  por  $\gamma = \sqrt{\rho}$ .

□

É possível notar que a desigualdade matricial (22), quando removidas a terceira linha e coluna, se reduz ao *Bounded-Real Lemma* para sistemas de tempo discreto (Geromel et al., 2019). De maneira similar se considerarmos (22) e desconsiderarmos as linhas e colunas geradas pelo *Bounded-Real Lemma*, obtemos a condição do Lema 1.

Um dos objetivos de se levar em consideração a norma  $\mathcal{H}_\infty$  no projeto de controladores é reduzir a relação *saída/distúrbio*, isto é, reduzir o efeito de um distúrbio exógeno no sistema. Sendo assim o Corolário 3 apresenta o problema de otimização capaz de minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  sujeito às condições do Teorema 2.

Corolário 3. O limitante da norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema pode ser minimizado pelo problema de otimização a seguir:

$$\begin{aligned} & \min_{Y, Z, V, R} \rho \\ & \text{s.a (14) e (15).} \end{aligned} \quad (27)$$

#### 4.4 Ganhos do controlador

Para a implementação o sinal de controle é limitado à faixa de  $[-25^\circ, 25^\circ]$ , dado que essa é a limitação física da planta. Os estados estimados  $\hat{x}$  pelo filtro de Kalman foram realimentados para a lei de controle.

As matrizes que ponderam o efeito do distúrbio foram definidas levando em consideração que não há distúrbio no sinal de controle, mas há distúrbio tanto na saída quanto nos estados. Os valores encontrados foram obtidos por meio de testes experimentais onde o sistema em estado estacionário foi observado. As matrizes são definidas como:

$$B_w = [0, 2, 0, 08]^\top, \quad D_{zu} = 0, \quad D_{zw} = 0, 1.$$

Assim, aplicando-se o Corolário 3, os seguintes ganhos são encontrados por meio do *solver* MOSEK e do *parser* YALMIP:

$$K = [17, 8954 \ 10, 0515] \quad (28)$$

e a norma é limitada por  $\|\mathcal{H}\|_\infty \leq 3,4226$ .

## 5. RESULTADOS

### 5.1 Análise do estado transitório

A Figura 3 mostra a resposta transitória do sistema, tanto da saída real do sensor quanto da saída estimada pelo filtro. É notável a saturação do atuador por boa parte do estado transitório, mostrando a eficiência do controlador em manter o sistema estável mesmo na presença da não-linearidade da entrada de controle.

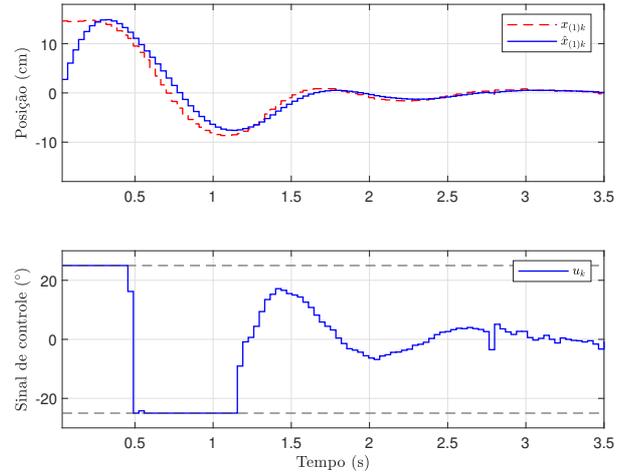


Figura 3. Resposta transitória no eixo  $x$ . O gráfico do sinal de controle mostra na linha tracejada o limite de saturação do atuador.

A posição estimada  $\hat{x}$  demora aproximadamente 6 amostras para convergir ao valor real devido à propagação do modelo para uma mudança instantânea de posição, porém após convergir o estimador consegue seguir com precisão a dinâmica do sistema.

A Figura 4 mostra a evolução das trajetórias dos eixos  $x$  e  $y$  na tela resistiva para diferentes condições iniciais de posição da esfera. É possível também notar que as trajetórias mais próximas à origem possuem menor sobressinal. Isso se deve ao fato que o sistema foi linearizado em torno da origem, assim para condições iniciais mais distantes desta o sistema linear apresenta mais erros em representar o sistema não-linear.

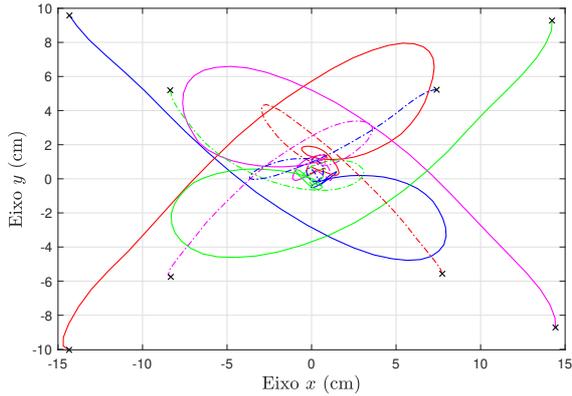


Figura 4. Trajetórias para diferentes condições iniciais. As posições iniciais são denotadas por um “x”.

### 5.2 Estabilidade na presença de distúrbios

Após o sistema atingir o estado estacionário, i.e  $x = 0$ , foram aplicados distúrbios no sistema diretamente na esfera, para avaliar a rejeição a distúrbios do controlador. Os resultados são exibidos na Figura 5. Os distúrbios de baixa amplitude são rapidamente corrigidos pelo sinal de controle, que satura por alguns instantes e volta a estabilizar o sistema. Para distúrbios de alta amplitude o sinal de controle permanece na região de saturação por mais tempo para evitar que a esfera caia do plano. Através dos gráficos é possível observar uma boa rejeição a distúrbios para o sistema. O filtro de Kalman também auxilia na estabilidade pois impede que os ruídos do sensor sejam realimentados, evitando picos momentâneos do sinal de controle causados por ruído, e não a uma movimentação real da esfera.

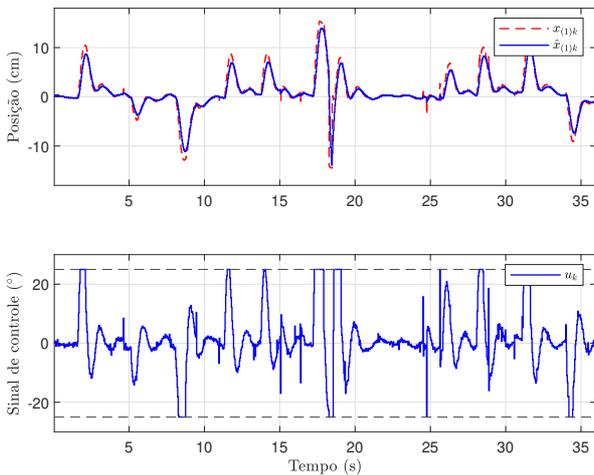


Figura 5. Distúrbios aplicados no eixo  $x$ .

## 6. CONCLUSÃO

A tarefa de estabilização de sistemas dinâmicos reais não é trivial e muitas vezes requer técnicas além daquelas encontradas em teoria de controle clássico. Os resultados obtidos comprovam a eficiência dos controladores robustos realizados por meio de otimização convexa para melhorar a

rejeição a distúrbios e também para garantir estabilidade na presença de saturação. Além disso o uso do filtro de Kalman foi fundamental, visto que o controlador por realimentação de estados necessita do segundo estado que não é mensurável, assim como filtrar a medida de posição para garantir um bom sinal para a lei de controle. Vale destacar que o controlador foi projetado utilizando um modelo linearizado do sistema, devido a isso, condições iniciais mais distantes da origem geram sobressinal maiores. O código utilizado na implementação e os modelos 3D projetados estão disponíveis em um repositório público <sup>1</sup>.

## AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Os autores também agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Processo 407885/2023-4.

## REFERÊNCIAS

- Aguirre, L.A. (2014). *Introdução à Identificação de Sistemas - Técnicas Lineares e Não Lineares Aplicadas a Sistemas: Teoria e Aplicação*, vol. 4. Editora UFMG.
- Aguirre, L.A., Bruciapaglia, A.H., Miyagi, P.E., Hiroshi, R., e Takahashi, C. (2007). *Enciclopédia de Automática*, vol. 1. Blucher.
- Boyd, S., Ghaoui, L.E., Feron, E., e Balakrishnan, V. (1995). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, vol. 37. SIAM Review.
- da Silveira Castro, R. et al. (2013). Modelagem e implementação de um sistema ball and plate controlado por servo-visão. *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. URL <http://www.sbai2013.ufc.br/pdfs/4635.pdf>.
- Geromel, J.C., Colaneri, P., e Bolzern, P. (2019). Differential linear matrix inequality in optimal sampled-data control. *Automatica*, 100. doi:10.1016/j.automatica.2018.11.021.
- Hurwitz, A. (1895). *On The Conditions Under Which an Equation Has Only Roots With Negative Real Parts*, vol. 65. *Mathematische Annalen*.
- Kalman, R.E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME*, 82. doi:10.1115/1.3662552.
- Nguyen, H.N., Olaru, S., Gutman, P.O., e Hovd, M. (2012). Improved vertex control for a ball and plate system. *IFAC Proceedings Volumes*, 45, 400–405. doi:10.3182/20120620-3-DK-2025.00151.
- Nokhbeh, M. e Khashabi, D. (2011). Modelling and control of ball-plate system. *Mathematical Modelling*.
- Sumega, M., Gorel, L., Varecha, P., Zossak, S., e Makys, P. (2018). Experimental study of ball on plate platform. *12th International Conference ELEKTRO 2018*. doi:10.1109/ELEKTRO.2018.8398374.
- Tarbouriech, S., Garcia, G., da Silva, J., e Queinnec, I. (2011). *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*. SpringerLink : Bücher. Springer London.
- Zhou, K. e Doyle, J. (1998). *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall Modular Series for Eng. Prentice Hall.

<sup>1</sup> <https://github.com/Not-a-Penguin/Ball-on-Plate>